Procesarea Semnalelor

Laboratorul 2

Domeniul Timp

1 Semnale periodice

Un semnal se numește *periodic* dacă valorile sale se repetă întocmai după un interval de timp T, numit perioada (principală a) semnalului, $x(t) = x(t + T)$.

Se numește *frecvența fundamentală* a unui semnal periodic valoarea $f = \frac{1}{T}$.

În practică nu se întâlnesc semnale periodice pure, deoarece semnalele reale sunt, într-o formă sau alta, afectate de zgomot, ce face ca valorile acestuia să nu se repete identic. Cu toate că acest concept este teoretic, analiza acestor tipuri de semnale este importantă în dezvoltarea unor metode ce se pretează și pentru semnale aperiodice.

Cel mai simplu semnal periodic îl reprezintă semnalul sinusoidal,

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \phi). \tag{1}$$

În ecuația de mai sus a este amplitudinea semnalului, anume valoarea maximă pe care o poate lua semnalul.

Frecvența fundamentală, f, reprezintă numărul de oscilații pe secundă (de câte ori într-o secundă se repetă valoarea semnalului) și se măsoară în Hz.

Mărimea ϕ reprezintă faza semnalului, se măsoară în radiani și se referă la poziția în cadrul perioadei în care se regăsește semnalul la $t = 0$.

Ecuația (1) se poate rescrie sub forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \tag{2}$$

unde ω reprezintă frecvența unghiulară și se măsoară în radiani.

Un semnal de tipul celui definit mai sus se numește semnal sinusoidal. Asemănător cu acesta este și semnalul de tip cosinus, denumit de asemenea semnal sinusoidal. Diferența între cele două este doar una de fază, datorită următoarei relații $\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$.

2 Cazul discret

Alternativă discretă a semnalului (1) este

$$x[n] = A \sin(2\pi f n t_s + \phi), \tag{3}$$

unde n reprezintă numărul eșantionului, iar t_s reprezintă perioada de eșantionare. Frecvența de eșantionare se definește $f_s = 1/t_s$.

Spre deosebire de semnalul sinusoidal continuu, care este periodic, cel discret este periodic doar în cazul în care raportul $N = \frac{2\pi k}{\omega}$ este număr întreg, unde $k \in \mathbb{Z}$.

3 Ghid Python

În plus față de modulele folosite în laboratorul precedent, la acest laborator veți avea nevoie de `scipy.io.wavfile`, `scipy.signal` și `sounddevice`.

Pentru a salva un semnal generat de voi în format audio puteți folosi următoarea secvență de cod:

```
rate = int(10e5)
scipy.io.wavfile.write('nume.wav', rate, signal).
```

Dacă doriți să încărcați semnalul salvat anterior pentru a-l procesa în continuare, puteți folosi:

```
rate, x = scipy.io.wavfile.read('nume.wav').
```

Pentru a reda audio un semnal salvat într-un `numpy.array` utilizați:

```
sounddevice.play(myarray, fs),
```

unde `fs` reprezintă frecvența de eșantionare și o puteți seta `fs` $= 44100$.

4 Exerciții

1. Generați un semnal sinusoidal de tip sinus, de amplitudine, frecvență și fază aleasă de voi. Generați apoi un semnal de tip cosinus astfel încât pe orizontul de timp ales, acesta să fie identic cu semnalul sinus. Verificați afișându-le grafic în două subplot-uri diferite.

2. Generați un semnal sinusoidal de amplitudine unitară și frecvență aleasă de voi. Încercați 4 valori diferite pentru fază. Afișați toate semnalele pe același grafic.

   Pentru unul dintre semnalele anteriore, adăugați zgomot aleator sinusoidei eșantionate generate. Noul semnal este $x[n] + \gamma z[n]$ astfel încât raportul semnal zgomot (Signal to Noise Ratio sau SNR) să fie $\{0.1, 1, 10, 100\}$. SNR este definit astfel: $\text{SNR} = \frac{\|x\|_2^2}{\gamma^2\|z\|_2^2}$. Vectorul z este generat eșantionând distribuția Gaussiană standard iar parametrul γ se calculează astfel încât să avem valorile SNR dorite. Căutați funcțiile *numpy.linalg.norm* și apoi *numpy.random.normal* care vă vor ajuta.

3. Ascultați semnalele pe care le-ați generat la laboratorul precedent pentru exercițiile 2.(a)-(d) folosind biblioteca `sounddevice`. Salvați unul din semnale ca fișier `.wav` și verificați că îl puteți încărca de pe disc utilizând `scipy.io.wavfile.read()`.

4. Generați două semnale cu forme de undă diferite (ex., unul sinusoidal, celălalt sawtooth) și adunați-le eșantioanele. Afișați grafic cele două semnale inițiale și suma lor, fiecare în câte un subplot.

5. Generați două semnale cu aceeași formă de undă, dar de frecvențe diferite, și puneți-le unul după celălalt în același vector. Redați audio rezultatul și notați ce observați.

6. Generați 3 semnale de tip sinus cu amplitudine unitară și fază nulă având frecvențele fundamentale:

   (a) $f = f_s/2$

   (b) $f = f_s/4$

   (c) $f = 0$ Hz

   unde f_s este frecvența de eșantionare, aleasă de voi. Notați ce observați.

7. Generați un semnal sinusoidal cu frecvența de eșantionare 1000 Hz și decimați-l la 1/4 din frecvența inițială (păstrați doar al 4-lea fiecare element din vector):

   (a) Afișați grafic cele două semnale și comentați diferențele.

   (b) Repetați decimarea (tot la 1/4 din frecvența inițială) pornind acum de la al doilea element din vector. Ce observați?

8. În practică se operează des cu următoarea aproximare: pentru valori mici ale lui α, $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Verificați dacă această aproximare este corectă, reprezentând grafic cele două curbe pentru valori ale lui α în intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$. Arătați și un grafic cu eroarea dintre cele două funcții. Folosiți și aproximarea Pade $\sin(\alpha) \approx \frac{\alpha - \frac{7\alpha^3}{60}}{1+\frac{\alpha^2}{20}}$, nu doar Taylor. Afișați rezultatele și pe un grafic unde axa $0y$ este logaritmică.